Intersection forms of 4-manifolds with homology 3-sphere boundaries

AUTHOR(S):

太田, 啓史

CITATION:

太田, 啓史. Intersection forms of 4-manifolds with homology 3-sphere boundaries. 数理解析研究所講究録 1990, 720: 67-93

ISSUE DATE:

1990-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/101818

数理解析研究所講究録
720巻 1990年 67-93

Intersection forms of 4-manifolds with homology 3-sphere boundaries

東大 理　太田 啓史 (Hiroshi Ohta)

要旨　Z-ホモロジー3球面を境界にもつある3種の，滑らかな4次元多様体の交叉形式を決定する。これは，閉4次元多様体の場合のDonaldsonの定理の拡張であるとともに，4次元の境界として3次元があらわれることから，3,4次元多様体の種々の不変量の相互関係を調べる為の1つのステージを与えているとも思える。

目次

§1. 序.

1983～1986年の一連のS. K. Donaldsonの仕事([2], [3], [4])から話をする。Yを連結な,可微分閉4次元多様体とする。以下この条件は必しも必要ではないが,簡単のため,Yは単連結とする。$b_2^+(Y)$を,Yの交叉形式の正の固有値の個数とする。この時,次がなりたつ。

定理([2]) $b_2^+(Y)=0$ ならば,Yの交叉形式は$\mathbb{Z}$上$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$に同値。

定理([3], [4]) Yは,spin多様体とし,$b_2^+(Y)=1$ ならば,Yの交叉形式は,$\mathbb{Z}$上$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$に同値。

定理([3], [4]) Yは,spin多様体とし,$b_2^+(Y)=2$ ならば,Yの交叉形式は,$\mathbb{Z}$上$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$に同値。

ここで,Yが単連結($H_1(Y,\mathbb{Z})$に2-torsionなし,で十分)ならば,Yが,spinであることと,Yの交叉形式がeven typeであることとは同値である。

本稿の目的は,上の定理を境界付4次元多様体の場合に拡張することである。境界付4次元多様体と,閉多様体の場合とでは,色々異なる点がでてくる。まず,閉の時は,Poincaré dualityより交叉形式は$\mathbb{Z}$上ユニモジュラーであるが,境界があると,ユニモジュラーとは限らない。しかし,境界(以下,境界成分は1つとする)が$\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面ならば,交叉形式は,$\mathbb{Z}$上ユニモジュラーとなる。以下,境界は,

$\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面とする。この下であっても，前の定理はそのままの形では拡張できない。

例1.1 滑らかで単連結な4次元多様体で，境界がPoincaréホモロジー3球面$\overline{\Sigma(2,3,5)}$（―は，次の意味；$\Sigma(2,3,5)$はBrieskornホモロジー3球面で，algebraic linkとしてcanonicalな向きが入っているが，―は，それとは逆の向きを表す）であり，交叉形式が対角化不可能な正定値$-E_8$であるものが存在する。（これを$|-E_8|$とかく）。

そこで，境界条件として，ホモロジーより更に詳しい情報が必要となってくると考えられる。それはπ_1であろうと考える。

§2. 提示

Xを単連結4次元多様体で，$\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面Sを境界にもつものとする。主な結果は次である。

定理 1（[14]） Xを上のようなspin多様体とする。この時，$b_2^+(X)=1$ 且つ $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2))=\{1\}$ならば，$X$の交叉形式は$\mathbb{Z}$上$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$に同値。

定理 2（[14]） Xを上のようなspin多様体とする。この時，$b_2^+(X)=2$ 且つ $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2))=\{1\}$ならば，$X$の交叉形式は$\mathbb{Z}$上$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$に同値。

注意 ① §1の1番はじめの定理に相当するものはTaubesにより証明されている。（[17]）。即ち，Xを単連結4次元多様体で，$\mathbb{Z}$-ホモロジー3-球面を境界にもつものとする。この

時，$b_2^+(X)=0$ 且つ，$\mathrm{Hom}(\pi_1(S),SU(2))=\{1\}$ ならば，X の交叉形式は $\mathbb{Z}$ 上 $\begin{pmatrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{pmatrix}$ に同値。

② 境界条件 $\mathrm{Hom}(\pi_1(S),SU(2))=\{1\}$ は一般にははずせない。上の Taubes の定理に於ては，先の例 1.1 が反例を与える。実際，$\pi_1(\Sigma(2,3,5))$ の $SU(2)$ 表現は自明表現をのぞいて丁度 2 つある。ちなみに，$\mathbb{Z}$-ホモロジー 3-球面の基本群の $SU(2)$ 表現は自明表現をのぞくと"偶数個"(discrete でない時も，適当な意味で数えることによる) であることが知られている。([18])
また，定理 1，定理 2 に関しては，次の例がある。

例 2.1　K を $K3$ 曲面とする。このとき，K は次の splitting をもつ。([7])．$K=K_1\cup_S K_2$ で，S は Brieskorn ホモロジー 3-球面 $\overline{\Sigma(2,3,7)}$ で，K_1 の交叉形式 $=-E_8\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$K_2$ の交叉形式 $=-E_8\oplus 2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$。一方 $\pi_1(\overline{\Sigma(2,3,7)})$ の $SU(2)$ 表現は自明表現を除いて 2 つある。([6]。)

しかし，$\mathrm{Hom}(\pi_1(S),SU(2))=\{1\}$ は，ゆるめることが可能であろうと思われる。これに関しては §3 で述べる。

定理 1，定理 2 の応用として，次がえられる。

系 1 (3 次元多様体への応用)。

S をホモトピー 3-球面で，単連結 spin 多様体 X で $b_2^+(X)=1$ 又は $b_2^+(X)=2$ なるものをなめらかにバウンドするものとする。この時，S の Rohlin 不変量は自明。

系2 (4次元多様体への応用)

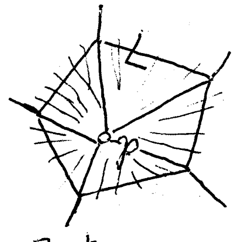
X_nを単連結閉4次元位相多様体で，交叉形式が，$nE_8 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 又は $nE_8 \oplus 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (但，nは任意の負整数.) なるものとする。この時，X_nは simplicial triangulation をもたない。

注意 ① 系1について。A. Cassonは，彼の不変量 (Casson's 不変量) を導入することにより，任意のホモトピー3球面の Rohlin 不変量は自明であることを証明した ([1])。系1は，ある種のホモトピー3球面 (ホモトピー3球面がどれぐらい存在するかわかっていない以上，この表現は適切かどうかわからないが) の Rohlin 不変量が自明であることを，Casson's 不変量をへずとも，Rohlin不変量の定義より直接に示せることを主張する。

② 系2について。Freedmanの分類定理 ([9]) より，上のような位相多様体X_nは，各nに対し，TOPカテゴリーにおいて一意に存在する。Cassonによれば，(1985, unpublished, See[17]) 非自明な Kirby-Siebenmann 障害をもつ閉4次元位相多様体は，simplicial triangulationをもたない，という。系2におけるX_nの Kirby-Siebenmann 障害は $n \pmod 2$ で与えられる。よって，nが偶数の時は，Kirby-Siebenmann 障害は自明だが，simplicial triangulation をもたない例となる。

系2の証明　Xがsimplicial triangulationをもったとすると、それは、有限ヶの頂点を除いてPL。この頂点pは1つであるとしてよい。この時、pのリンクLはホモトピー3球面になり、一方、$X-p$はPLゆえ、そのPL-structureに沿ってsmoothingできる。すると、$X-p$は、なめらかなproduct end $L\times\mathbb{R}$をもつ。これは、定理1, 2に反する。([17]も参照)。□

(smoot product end)



§3. 3, 4次元多様体の種々な不変量との関係。

定理1, 2の境界条件$Hom(\pi_1(S), SU(2))=\{1\}$に関連して、3, 4次元多様体の種々の不変量との関係について考えてみる。

まず、$\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面Sの不変量からいくつかふり返る。

① Casson不変量λ　これは、$Hom(\pi_1(S), SU(2))^*/SU(2)$共役の元の個数を"適当な意味で"数えたものとして定義される。ここに、$*$は、自明表現(＝ただ1つの可約表現)を除くことを表す。"適当な意味で"とは、一般に表現空間$Hom(\pi_1, SU(2))/\sim$は離散的とは限らないので、適当に摂動することにより、"生成元"をみつけ、それを符号付で数えることによる。(詳しくは[1]参照)。このλは、Rohlin不変量μの$\mathbb{Z}$へのもちあげであることが重要。$\lambda(S)\equiv\mu(S)\pmod 2$。

② Floer ホモロジー群 $FH_*(S)$. ($*\in\mathbb{Z}_8$) 詳しくは，[8]を参照。ここで重要なことは，Floerホモロジー群も，$\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2))/\sim$ を介して定義され，しかもCasson不変量の精密化となっていることである。実際，Taubes[18]によれば，$\lambda(S) = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}_8}(-1)^i \operatorname{rank} FH_i(S)$ である。

注意① Floer ホモロジー群の計算例。まず，Fintushel-SternがBrieskorn 3球面に関し，完全に計算法を求めたのが先駆となり[6]その後，一般のSeifert fibered 3球面に関しては，まず，[6] をうけつぐ形で，高倉（[16]）により，$FH_{odd}=0$が示された。更に古田-Steer（[13]）により，Seifert fibred 3球面のFloerホモロジー群の計算法が完全に確立された。また，これらのアプローチとは全く異なる方法で，吉田[20]により，いくつかのFloer ホモロジー群が計算されている。（例えば，8の字knot に沿うDehn surgeryでえられるホモロジー3球面。）

② Floer ホモロジー群の拡張．$\mathbb{Z}$−ホモロジー3球面以外に対しても，いくつかのFloerホモロジー群の類似物が定義されている。まず，レンズ空間に関しては，古田（[12]）により，また，H_1に，torsion のない3-manifolds に関しては，深谷（[10]）により，えられている。（いずれも記号としては，FH_* として書けてしまう，というのは冗談である。）

さて，この節では，以上の3次元の不変量（π_1の情報の

もりこまれた）と4次元多様体の交叉形式という不変量が，どのような関係にあるか，考えてみる。まず，次の興味深い現象が出発点となる。

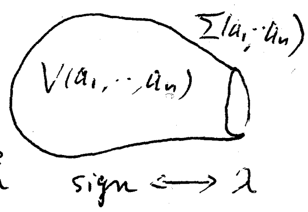
定理（Fintushel-Stern，福原－松本幸－坂本）[6]，[11]．

$a_1,\cdots,a_n$ を2以上の自然数で，どの2つも互に素とする。$\Sigma(a_1,\cdots,a_n)$ を，Seifert fibred ホモロジー3球面とし，$V(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ を，それに対応する Milnor fibre とする。この時，

$$\lambda(\Sigma(a_1,\cdots,a_n)) = \frac{1}{8}\mathrm{sign}(V(a_1,\cdots,a_n))$$

がなりたつ。□．

Milnor fibre $V(a_1,\cdots,a_n)$ は，単連結なスピン4次元多様体で，$\Sigma(a_1,\cdots,a_n)$ を境界とするものである。



この定理は，(ある種の)ホモロジー3球面の基本群の情報は，それをバウンドするスピン多様体のH_2とくに交叉形式と関係している，ことを教えてくれる。詳しく言うと，Casson不変量が，交叉形式のうち，signature なる不変量に対応している。そこで，今，我々は4次元多様体の交叉形式自体を決定しようとしている。この時，次の代数的な事実に注意する。

定理（Hasse-Minkowski）（[15]）．

$\mathbb{Z}$上の不定値ユニモジュラーな2次形式は，(イ) type，(ロ) signature (ハ) rank の3つの不変量で分類される。

よって，我々の定理1,2の場合と，先の[F-M-S]の定理とを比較すると，typeはevenでfixした下で，我々はsignatureのみならず，rankまで決めなければならない。それには，境界条件として，Casson不変量よりも詳しい不変量が対応すると思われる。それは，Floerホモロジー群であろうと考える。

予想1(定理？)(Donaldson, Taubes, Floer, …？)

Taubesの定理($b_2^+(X)=0$ の場合，§2，注意①参照)において，境界条件，$\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2))=\{1\}$は，$FH_1(S)=0$でおきかえれるだろう。

注意③ 向きを入れかえて，$b_2^-=0$とすると，$FH_4(S)=0$にかわる。

④ §1．例1.1において，$\partial|-E_8|=\overline{\Sigma(2,3,5)}$であった。$\overline{\Sigma(2,3,5)}$のFloerホモロジー群は，[6]によって求められている；

$$FH_*(\overline{\Sigma(2,3,5)})\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & *=1,\ 5\\ 0 & \text{その他。}\end{cases}$$

これは，予想1に矛盾しない。

更に，我々は，定理1,2に対しても予想をたてる。

予想2

定理1,2において，境界条件は，$FH_*(S)=0$でおきかえられる。但，$*=1$，と，他いくつか(3 or 7 を含む)のdegreeである。

注意⑤ 先の§2. 例2.1において。[6]により，$\overline{\Sigma(2,3,7)}$のFloer群は，

$$FH_*(\overline{\Sigma(2,3,7)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & *=3,7 \\ 0 & \text{その他}。 \end{cases}$$

予想2が予想1より多くのFloer群のvanishingが必要なのは，上の例からもわかるが，実際証明しようとすると，定理1,2は，Taubesの定理にくらべ，高い次元のcomponentのモジュライ空間を取り扱い，そのendsをコントロールする為にいくつかのFloer群のvanishingが必要だと思われる。

更に，定理1,と定理2とでvanishingの条件が異なるであろうとも考えられる。

さて，この予想は，Floerホモロジー群が，Casson不変量の精密化であるという立場からたてたものであるから，当然の帰結として次のようなことが予想より従う．

予想の系　$\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面Sで，$\lambda(S)=0$かつ$FH_*(S)\neq 0$なるものが存在する。

これは，対角化不可能な不定値交叉形式をもつ単連結4次元多様体で，その境界Sは$\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面で$\lambda(S)=0$なるもの,が存在する，ことによる。

注意⑥　予想の系の別証。これは河内明夫先生より御指摘頂いた。それは，次の2つのことを用いることによる。

(1) Casson不変量の和公式．　$\lambda(S_1 \# S_2)=\lambda(S_1)+\lambda(S_2)$

及び $\lambda(\overline{S}) = -\lambda(S)$. （$-$ は orientation reverse の意味）

(2) (吉田朋好先生の observation)

$$FH_*(S_1 \# S_2) \supset FH_*(S_1) \oplus FH_*(S_2) \quad \text{(direct sum)}$$

今，S_1, S_2 を2つの $\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面で $\lambda(S_1) = k_1$, $\lambda(S_2) = k_2$ とする。$k_1, k_2 > 0$ としてよい。このとき，Taubes により（§3 ②参照）$FH_*(S_1) \neq 0$, $FH_*(S_2) \neq 0$. そこで，$S := \underbrace{S_1 \# \cdots \# S_1}_{k_2\text{ケ}} \# \underbrace{\overline{S_2} \# \cdots \# \overline{S_2}}_{k_1\text{ケ}}$ とすると，これは求めるホモロジー3球面である。実際，(1) から $\lambda(S) = 0$，(2) から $FH_*(S) \supset FH_*(S_1) \oplus \cdots \oplus FH_*(S_1) \oplus FH_*(\overline{S_2}) \oplus \cdots \oplus FH_*(\overline{S_2}) \neq 0$.

§4. 定理の証明

ここでは，定理1の証明について述べる。定理2は同様の方法で証明できる。([14] 参照)。証明の方法は，荒く言えば，Donaldson の方法を open (product end をもつ) 4次元多様体に拡充したものと，Taubes の解析 (インスタントン数 $= 1$) をインスタントン数2 (or 3) に拡充したもの，の2つの組み合せによる。

4.1 reduction

いくつかの代数的な結果を用いることにより，定理の主張の reduction を行う。

まず，先にも述べた Hasse-Minkowski の分類定理より，任意の，even，ユニモジュラー不定値な $\mathbb{Z}$ 上の2次形式は，

$\underset{\mathbb{Z}}{\cong} n E_8 \oplus m\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ for $^\exists n \in \mathbb{Z}$, $^\exists m \geqq 0$ とかける。更に次の mod 2 reduction により，rank の評価式がある。

<u>レンマ1</u>(mod 2 reduction) [15] or [3].

$(\ ,\ ): \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}$ を，even ユニモジュラー2次形式で rank が r なるものとする。この時，次の同値がある。

$$r \leqq 2 \Longleftrightarrow Q_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$
$$:= (\alpha_1,\alpha_2)\cdot(\alpha_3,\alpha_4) + (\alpha_1,\alpha_3)\cdot(\alpha_2,\alpha_4) + (\alpha_1,\alpha_4)\cdot(\alpha_2,\alpha_3)$$
$$\equiv 0 \pmod 2 \qquad {}^\forall \alpha_i \in \mathbb{Z}^r$$

<u>注意①</u> この同値は，より高いランクに対しても同様のものがある。例えば，定理2では，$r \leqq 4 \Longleftrightarrow Q_6(\alpha_1, \cdots, \alpha_6) \equiv 0 \pmod 2$ を用いる。

よって，このレンマより，$Q_4(\alpha_1, \cdots, \alpha_4) \equiv 0 \pmod 2$ を言えば，2次形式は，$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ に $\mathbb{Z}$ 上同値となる。

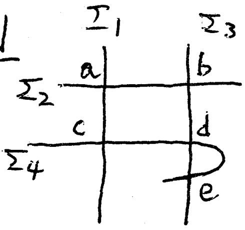
今，2次形式が，X の交叉形式

$$(\ ,\ ): H_2(X, \partial X : \mathbb{Z})/_{\mathrm{Tor}} \times H_2(X, \partial X ; \mathbb{Z})/_{\mathrm{Tor}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

で与えられている時，$Q_4(\alpha_1, \cdots, \alpha_4) \pmod 2$ の幾何学的意味は次である。$\alpha_i \in H_2(X, \partial X : \mathbb{Z})$ $(i = 1, \cdots, 4)$ とする。α_i を smooth に表現する曲面を Σ_i とする。$\partial X \neq \phi$ ゆえ，一般には $\partial \Sigma_i \neq \phi$ であるが，今，$\partial X = S$ は $\mathbb{Z}$-ホモロジー3球面であることから $H_2(X, \partial X : \mathbb{Z}) \cong H_2(X : \mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{C}P^\infty]$ より，$\partial \Sigma_i = \phi$ にとれる。(Σ_i の genus は十分大きい)。この時，$Q_4(\Sigma_1, \cdots, \Sigma_4) \pmod 2$ は，定義より，

レンマ2 $Q_4([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_4])$は，曲面$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_4$のconfiguration numberにmod2で等しい。ここで，$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_4$のconfiguration numberとは，順序を考えない次のような点の組$\{x_1,x_2\}$の数のこと。$x_1,x_2\in X$，$x_1\in\Sigma_i\cap\Sigma_j$，$x_2\in\Sigma_k\cap\Sigma_l$，但し，$(i,j,k,l)$は，$(1,2,3,4)$のある置換。

例



左図のように$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_4$があるとすると，configuration numberは，

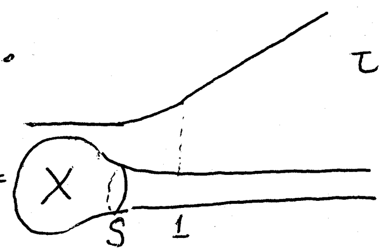
$\{a,d\},\{a,e\},\{c,b\}$より 3 .

以上より，示すべきことは，$^\forall x_i\in H_2(X;\mathbb{Z})$をsmoothに表現する$^\forall\Sigma_i\subset X$（一般の位置にある）$(\partial\Sigma_i=\phi)$に対し，$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_4$のconfiguration numberが偶数$(Q_4([\Sigma_1],\cdots,[\Sigma_4])\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2))$であること。

4.2 gauge theory setting

上のことを，gauge理論を用いて証明する。その枠組をTaubes[17]に従い準備する。$M:=X\cup_S S\times[0,\infty)$とおく。S上に1つRiemann計量をfixし，M上の計量としては，$End(M)=S\times[N,\infty)$ $(N\gg1)$上では，先に入れたS上の計量と$[N,\infty)$上の標準的計量とのproduct計量になるものを1つfixする。更に$\tau: M\to\mathbb{R}$なるsmooth mapで，X上zero，$S\times[1,\infty)\longrightarrow[1,\infty)$ projectionとなるものを1つfix。$P=M\times SU(2)\longrightarrow M$を自明なSU(2)主束とする。

$\mathcal{EA}(P):=\{P$上のconnectionsで，$End\ M$上では，自明平坦接続にisomorphicなもの$\}$

$M=$ 

$A \in \mathcal{EA}(P)$ に対し, $P_1(A)$ を
$$P_1(A) := -\frac{1}{8\pi^2}\int_M tr(F_A \wedge F_A)$$
で定義する。ここで $tr(\cdot)$ は, 標準的な表現で trace をとる。このとき, M は非コンパクトだが, $A \in \mathcal{EA}(P)$ より $P_1(A)$ は有限値で well-defined。更に Chern-Weil 公式から, $P_1(A) \in \mathbb{Z}$. (See [17]).

そこで, $P_1(A_0) = k \in \mathbb{Z}$ なる $A_0 \in \mathcal{EA}(P)$ を1つ fix し, 更に $\delta > 0$ を fix。考える接続のクラスとして,
$$\mathcal{A}_k(\delta) := \{A_0 + a \mid a \in L^2_{2,loc}(AdP \otimes T^*M),\ \|a\|_{A_0,\delta} < \infty\}$$
とおく。ここで, AdP は $P \to M$ に $SU(2)$ の adjoint 表現で同伴する $su(2)$ 束で,
$$\|a\|^2_{A_0,\delta} := \int_M e^{\tau\delta}\{|\nabla^{(2)}_{A_0} a|^2 + |\nabla_{A_0} a|^2 + |a|^2\}.$$
は, weight δ の weighted Sobolev norm を表す。$\mathcal{A}_k(\delta)$ は, このノルムで Banach 多様体の構造をもつ。次にゲージ群として,
$$\mathcal{G}_k(\delta) := \{g \in L^2_{3,loc}(Aut\,P) \mid \|\nabla_{A_0} g\|_{A_0,\delta} < \infty\}$$
とする。$\mathcal{B}_k(\delta) := \mathcal{A}_k(\delta)/\mathcal{G}_k(\delta)$ に商位相を入れるとこれは, 可約接続のゲージ軌道を除いて, 滑らかな Banach 多様体になる。[17] によれば, $\mathcal{B}_k(\delta)$ は, $A_0 \in P_1^{-1}(\mathcal{EA}(P) \to k)$ のとり方にはよらない。勿論 k には依存する。

$*$ を, $Ad\,P$-valued forms に作用する M 上の Hodge star operator とする。$F_+ := \frac{1}{2}(F + *F) : \mathcal{A}_k(\delta) \longrightarrow L^2_{1,loc}(AdP \otimes \wedge^2 T^*M)$ を, $\mathcal{A}_k(\delta)$ の元の曲率の self-dual part を与える写像とする時,

<u>定義</u> $\mathcal{M}_k(\delta) := F_+^{-1}(0)/\mathcal{G}_k(\delta)$ とおいて，これを，M 上の anti-self dual 接続のモジュライ空間と呼ぶ。

$\mathcal{M}_k(\delta)$ の interior structure に関しては，Taubes の結果[17]が基本的である。それをまとめておく。

<u>定理 4.2.1</u> M が不定値交叉形式をもつ時，ある $\delta_1>0$ が存在し，任意の δ, $0<\delta<\delta_1$ と，M 上の generic な計量に対し，$\mathcal{M}_k(\delta)$ は可約接続のゲージ軌道を含まない。

<u>定理 4.2.2</u> ある $\delta_2>0$ が存在し，任意の δ, $0<\delta<\delta_2$ と，M 上の generic な計量に対し，$\mathcal{M}_k(\delta)$ は，

$$\dim \mathcal{M}_k(\delta) = 8k - 3(1 - b_1(M) + b_2^+(M))$$

なる次元の有限次元 C^∞ 多様体となる。

<u>定理 4.2.3</u> $k \geqq b_2^+(M)$ ならば，$\mathcal{M}_k(\delta) \neq \phi$。

そこで，$\delta>0$ として，上の性質をみたすようにえらんでおき，それを新ためて fix する。以下この δ は省略しておく。我々が証明で用いるものは $\mathcal{M}_2$ で今 M は不定値故，$\mathcal{M}_2$ の中には可約接続が含まれない。更に，

$$\dim \mathcal{M}_2 = 8\times 2 - 3(1+1) = 10 \quad .$$

4.3. Donaldson の方法

Σ_i $(i=1,\cdots,4)$ を §4.1 でえらんだ X 内の閉リーマン面とする。即ち，$[\Sigma_i] = \alpha_i \in H_2(X, \partial X; \mathbb{Z}) \cong H_2(X, \mathbb{Z})$。

$$\mathcal{A}^*_{\Sigma_i} := \{\, P|_{\Sigma_i} = \Sigma_i \times SU(2) \to \Sigma_i \text{ 上の既約接続の全体} \,\}$$

$\mathcal{G}_{\Sigma_i} :=$ $P|_{\Sigma_i}$ のautomorphism全体のなすゲージ群。

$\mathcal{G}_{\Sigma_i, 0} :=$ Σ_i上のある基点x_0上のファイバーをfixするautomorphism

のなす$\mathcal{G}_{\Sigma_i}$の正規部分群。

とおく。$\mathcal{G}_{\Sigma_i}$は$\mathcal{A}^*_{\Sigma_i}$に自由に作用しないが、$\mathcal{G}_{\Sigma_i,0}$は、$\mathcal{A}^*_{\Sigma_i}$に自由に作用する。

$$\mathcal{B}^*_{\Sigma_i} := \mathcal{A}^*_{\Sigma_i}/\mathcal{G}_{\Sigma_i}, \qquad \widetilde{\mathcal{B}}^*_{\Sigma_i} := \mathcal{A}^*_{\Sigma_i}/\mathcal{G}_{\Sigma_i,0}$$

とおく。この時、次の主ファイブレーションがある。ここで$\{\pm 1\}$は、$A \in \mathcal{A}^*_{\Sigma_i}$のisotropy群に対応する。

$$SO(3) \cong SU(2)/\pm 1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}^*_{\Sigma_i} \longrightarrow \mathcal{B}^*_{\Sigma_i}$$

$\mathcal{B}^*_{\Sigma_i}$上の$\mathbb{C}$-直線束$\mathcal{L}_{\Sigma_i}$を構成する: $A \in \mathcal{A}^*_{\Sigma_i}$とする。$\Sigma_i$のspin structureを1つfixし、その$\pm$spinor束を$W_{i,\pm} \to \Sigma_i$とする。Pに同伴するΣ_i上の$\mathbb{C}^2$-vector束を$E_i \to \Sigma_i$とする。このとき、E_iに係数をもつAでtwistされたDirac作用素$\mathcal{D}_{\Sigma_i, A}$

$$\mathcal{D}_{\Sigma_i, A} : \Gamma(W_{i,+} \otimes_{\mathbb{C}} E_i) \longrightarrow \Gamma(W_{i,-} \otimes_{\mathbb{C}} E_i)$$

が定義され、これはellipticな微分作用素で、Fredholm作用素。

このdeterminant indexを$\mathcal{L}_{\Sigma_i, A}$とおく。

$$\mathcal{L}_{\Sigma_i, A} := (\overset{max}{\wedge} \mathrm{Ker}\, \mathcal{D}_{\Sigma_i, A})^* \otimes_{\mathbb{C}} (\overset{max}{\wedge} \mathrm{Coker}\, \mathcal{D}_{\Sigma_i, A})。$$

これから$A \in \mathcal{A}^*_{\Sigma_i}$でパラメトライズされた$\mathbb{C}$-直線束

$$\mathcal{L}_{\Sigma_i} \longrightarrow \mathcal{A}^*_{\Sigma_i} \quad \in K(\mathcal{A}^*_{\Sigma_i})$$

ができる。$\mathcal{G}_{\Sigma_i,0}$は$\mathcal{A}^*_{\Sigma_i}$に自由に作用するから、$\mathcal{L}_{\Sigma_i}$は$\widetilde{\mathcal{B}}^*_{\Sigma_i}$上のbundleにおちる。更に$\{\pm 1\}$は$\mathcal{L}_{\Sigma_i}$のファイバーに自明に作用することが、Atiyah-Singerのfamilyの指数定理からわかる。よって結局、$\mathcal{L}_{\Sigma_i}$は、

$\mathcal{B}^*_{\Sigma_i}$ 上の $\mathbb{C}$-直線束におちる。これを改めて $\mathcal{L}_{\Sigma_i} \to \mathcal{B}^*_{\Sigma_i}$ とかく。この時. Donaldsonは, $c_1(\mathcal{L}_{\Sigma_i})$ は, $\alpha_i \in H_2(X;\mathbb{Z})$ の代表元 Σ_i のとり方, 及び, Σ_i 上のスピン構造のえらび方には依らないことを示した。

次にこの直線束を, ある種の可約接続上にまでのばすことを考える。可約接続の軌道の近傍はconeの形をしているが, そこまで $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$ がのびるための障害は, その可約接続がdegree 0のreductionになることである。(これから, 可約接続の近傍での $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$ の自明化が与えられ, それにより自明に $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$ がのばせる。) つまり, $\mathcal{L}_{\Sigma_i} \longrightarrow \mathcal{B}^*_{\Sigma_i} \cup \{\text{degree 0 reductions on } \Sigma_i\}$ にのばせる。ここで注意すべきことは, Σ_i 上の自明平坦接続は, degree 0 reductionなる可約接続であることである。そこで, 制限写像 $r_{\Sigma_i} : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{B}^*_{\Sigma_i} \cup \{\text{degree 0 reductions}\}$ により, 拡張された $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$ をひきもどす $r^*_{\Sigma_i}\mathcal{L}_{\Sigma_i} \longrightarrow \mathcal{M}_2$. $\mathcal{L}_{\Sigma_i}$ の切断 s_i に対し, $V_{\Sigma_i}(s_i) := (r_{\Sigma_i}{}^* s_i)^{-1}(0) \subset \mathcal{M}_2$ とおく。この時次の様なtransversalな切断 s_i がとれる。

<u>レンマ (transversality lemma)</u>([3], [5], [14])

① 各 i に対し, $\mathcal{L}_{\Sigma_i} \to \mathcal{B}^*_{\Sigma_i} \cup \{\text{degree 0 reductions}\}$ の切断 s_i で, そのpull back切断 $r^*_{\Sigma_i} s_i$ は, 余次元2のsubmanifold $V_{\Sigma_i} \cap \mathcal{M}_2$ 上transverseに消えるものが存在する。

② ①の切断は更に, 全てのmultiple intersection $V_{\Sigma_{i_1}} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_{i_p}} \cap \mathcal{M}_2$ がtransverseになるようにとれる。

③ ①の切断は，Σ_iの自明平坦接続の近傍では消えない。
このレンマの証明は，有限次元多様体 $\mathcal{M}_2$ に対する Sard の定理による。又③は，自明平坦接続は $\mathcal{B}^*_{\Sigma_i} \cup \{\text{degree } 0 \text{ reductions}\}$ の中で孤立(1点)しているから，明に満たすよう s_i がとれるのであるが，後の議論で本質的となる。切断 s_i をレンマのように選ぶ。そこで我々が欲しいモジュライ空間は，$N_2 = \mathcal{M}_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_4}$ (切断 s_i は，レンマの様にとっておけば何でもよいので任意に fix したものとし，s_i は省略しておく)。であり，次元は，transversality より $\dim N_2 = \dim \mathcal{M}_2 - 2 \times 4 = 10 - 8 = 2$ である。

4.4. Ends of moduli

開多様体上の anti-self dual 接続のモジュライ空間の ends はある，いくつかの点で曲率が集中してゆくものからなり，それはいわゆる bubble theorem により記述された。しかし，開多様体 $M = X \cup_S S \times [0, \infty)$ の場合には，M の end に曲率密度が"逃げてゆく"接続という新しいタイプの ends が現われてくる。ここでは，境界条件 $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = \{1\}$ を本質的に用いることにより，この逃げてゆく接続がたちのよい性質をもつもの(粒子のようなふるまいをする)であることを述べる。このことは，後で gap theorem という形でまとめられる。即ち，$\mathcal{M}_2$ の ends は，bubble theorem と gap theorem の2つにより記述される。

まず bubble theorem。これは基本的には local theorem 故，

次の形でまとめることができる。([17]も参照)

定理 (bubble theorem)

$M = X \cup_S S\times[0,\infty)$ で $P = M\times SU(2) \to M$ は以前の通りとする。M上の generic な C^m-リーマン計量に対し次が成立。$\{[A_j]\}\subset \mathcal{M}_k$ $(k\geq 0)$ とする。

(1) $\exists A$, anti-self dual 接続 on P, $0\leq \exists l\in\mathbb{Z}\leq k$, $\exists\{x_1,\cdots,x_\alpha\}\in M$, 有限個の M の点, $\exists\{h_j\}\in C^\infty(\mathrm{Aut}P|M-\{x_1,\cdots x_\alpha\})$, $\exists\{A_j\}$; A_jの部分列 (indexは新しくつけかえて同じ j で表す), such that

$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{1}{8\pi^2}\displaystyle\int_M |F_A|^2 = l \\ \cdot\ h_j^* A_j \longrightarrow A \quad \text{on compact domains in } M-\{x_1,\cdots,x_\alpha\} \text{ in } C^m\text{-topology}. \end{cases}$$

(2) $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = 1$ の時, (1)において $[A]\in\mathcal{M}_l$ なるように $\{h_j\}$ がえらべる。

(3) $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = 1$ の時, もし,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{\tau\geq n}|F_{A_j}|^2 = 0$$

ならば, $\exists\delta_1>0$, $\exists n<\infty$ で such that.

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\tau\geq n} e^{\tau\delta}\sum_{p=0}^{m}|\nabla_A^{(p)}(A-h_j^*A_j)|^2 = 0 \quad \text{for } \forall\delta<\delta_1$$

即ち, $\|\ \ \|_\delta$ ノルムで, $\tau\geq n$ 上, $h_j^*A_j \longrightarrow A$.

更に, この時, $l=k \iff \{x_\alpha\}=\phi$ で この時 特に, $h_j^*A_j$ は, $\mathcal{M}_k$ の中で $\|\cdot\|_\delta$ ノルムで $[A]$ に収束する。□

注意① M上の generic な計量というのは, End M で product

計量になる様なものの中で摂動し得られた計量のことで，あらゆる計量の中で摂動したものではない。書き忘れたが，これは §4.2 に於いても同じである。

注意② (2) において，$\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = \{1\}$ が本質的かどうかはわからない。

注意③ (3) は，逃げてゆく接続がない時，bubble theorem によって $\mathcal{M}_k$ の ends は完全に記述されることを言っている。

そこで，次に問題となるのは，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{t\geq n}|F_{A_j}|^2 \neq 0$$

なる時である。$\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = 1$ と仮定する。

<u>定理 (Gap theorem)</u> l を $0 \leq l < k$ なる整数とする。$\{[A_j]\} \subset \mathcal{M}_k$ とする。もし，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{t\geq n}|F_{A_j}|^2 > l$$

ならば，実は，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{t\geq n}|F_{A_j}|^2 \geq l+1 \ . \ \square$$

$[A_j] \in \mathcal{M}_k$ より，

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_M |F_{A_j}|^2 = k$$

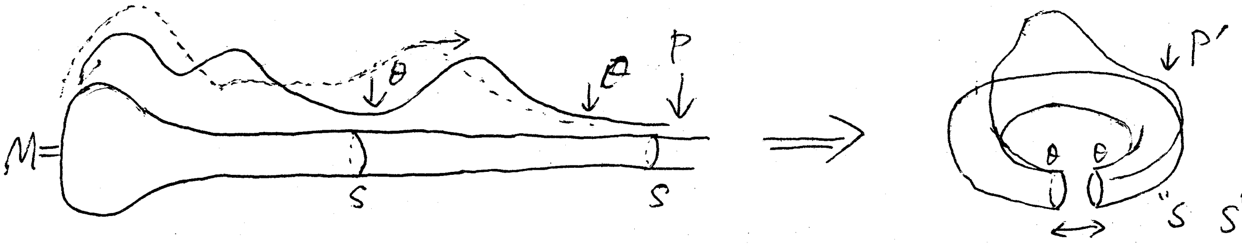
に注意すれば，上の定理より直ちに，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{t\geq n}|F_{A_j}|^2 = 0 \text{ or } 1 \text{ or} \cdots k-1 \text{ or } k .$$

が従う。

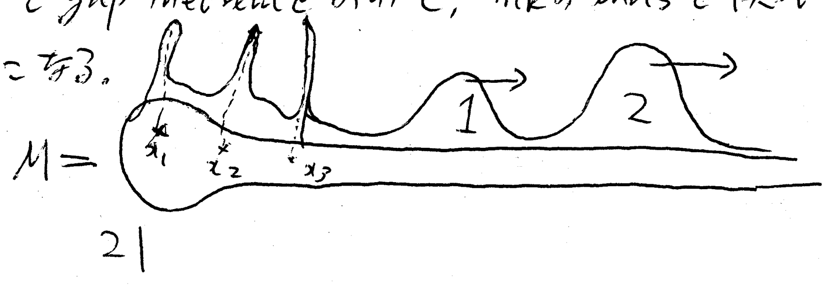
証明のキーとなるのは，Uhlenbeck の L^p-boundness [19] と，

Chern-Weil 公式である。荒く言えば，接続の列 A_j が End. M に逃げてゆくとき，曲率密度のふもとのところは，小さくなって



ゆく。Uhlenbeck の L^p-boundness 定理から，これは S 上のある平坦接続に近づく。ところが $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) = 1$ より，S上の平坦接続は自明なもの θ しかない。そこで，今，この部分を上の右図のようにはりあわせ，bundle も，接続(両端はともに θ)もはりあわせる。こうしてえられた bundle $P' \to S \times S^1$ は，はりあわせる部分の自明化のちがい（θ の固定化群 $\cong SU(2)$ で twistされ）によりねじれた $SU(2)$ 束となる。接続ははりあわせたところで少し cut off することから，"ほとんど" anti-self dual なものとなる。よって Chern-Weil の公式から，新しくえられた接続の曲率の積分は $c_2(P')$ に等しい。よってこの積分値は整数値で現われる。尚一般に $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SU(2)) \neq 1$ の時は，この積分値はふもとに現われる平坦接続 α, β の Chern-Simons functional $\int \mathrm{tr}(d\alpha \wedge \alpha + \frac{2}{3}\alpha\wedge\alpha\wedge\alpha)$ の差 (mod $\mathbb{Z}$ で) になる。

以上 bubble theorem と gap theorem をあわせ，M_k の ends を模式的にかくと次のようになる。



そこで $\mathcal{M}_2$ の ends は次のようなタイプに分類できる。

$\{[A_j]\} \subset \mathcal{M}_2$ とする。

Case (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{\tau\geq n}|F_{A_j}|^2 = 2$.

Case (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{\tau\geq n}|F_{A_j}|^2 = 1$.

Case (2)-a $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\sup_{\tau\leq n}|F_{A_j}| < \infty$ for $\forall n<\infty$ ($\alpha=0$ に対応)

Case (2)-b $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\sup_{\tau\leq n}|F_{A_j}| = \infty$ for $\exists n<\infty$

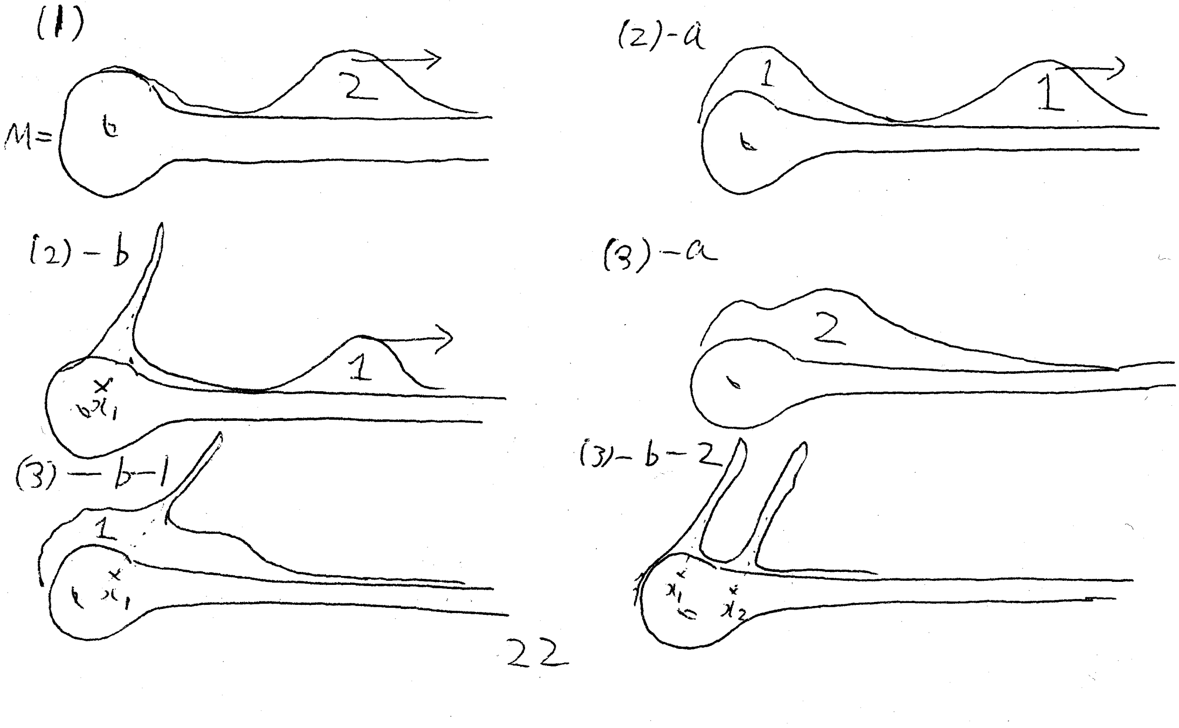
Case (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{8\pi^2}\int_{\tau\geq n}|F_{A_j}|^2 = 0$.

Case (3)-a $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\sup_{\tau\leq n}|F_{A_j}| < \infty$ for $\forall n<\infty$ ($\alpha=0$ に対応)

Case (3)-b $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\sup_{\tau\leq n}|F_{A_j}| = \infty$ for $\exists n<\infty$

Case (3)-b-1 bubble theorem において $\alpha=1$

Case (3)-b-2 bubble theorem において $\alpha=2$



注意 bubble theorem (3) より, Case (3)-a の時 $[A_j]$ は $\mathcal{M}_2$ の中である $[A] \in \mathcal{M}_2$ に収束するので, これは実は end ではない。また, Case (3)-b-2 では, 曲率の集中点 x_1, x_2 は重さなって 1 点になる場合もある。

4.5 transversality argument

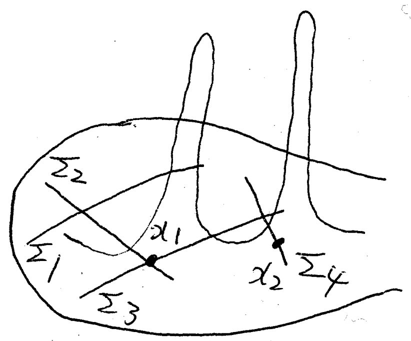
$\mathcal{M}_2$ の ends のタイプは §4.4 の如くに記述された。ここで考えるのは, $N_2 = \mathcal{M}_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_4}$ (§4.3) である。切断 s_i $(i=1,\dots,4)$ をうまくえらんでおけば, $\mathcal{M}_2$ の ends のうちいくつかは N_2 の ends には現われないようにできる, ということを, §4.3 の transversality lemma を使って示す。

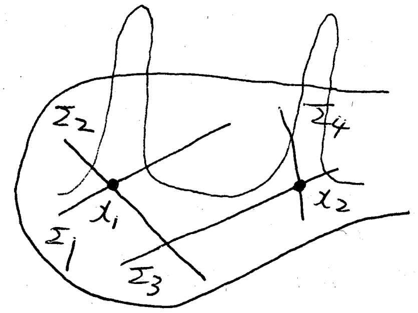
レンマ 1 直線束 $\mathcal{L}_{\Sigma_i} \longrightarrow \mathcal{B}^*_{\Sigma_i} \setminus \{\text{degree } 0 \text{ reductions}\}$ の切断 s_i で, N_2 には Case (1), (2)-a, (2)-b, (3)-b-1, のタイプの ends が現われないようにできる, ものが存在する。

レンマ 2 s_i を レンマ 1 のようにえらぶ。この時, N_2 の ends には, タイプ (3)-b-2 だけが現われるが, 曲率の集中点 x_1, x_2 は, $x_1 \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$, $x_2 \in \Sigma_k \cap \Sigma_l$ (但, (i,j,k,l) は $(1,2,3,4)$ のある置換) でなければならない。

レンマ 1 を示すには, いわゆる dimension counting という方法と, Uhlenbeck の L^p-boundness がポイントとなる。まず (1) の場合, X 上では曲率が 0 に近くなってゆくから, X 上ある平坦接続に近づく。$\pi_1(X) = 1$ 故, それは X 上の自明平坦接続で

ある。これを各surface Σ_i に制限すると，Σ_i 上自明平坦接続に
近づく。しかし，transversality lemma ③から，このような接
続は，V_{Σ_i} の中に入らない。よって $N_2 = \mathcal{M}_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_4}$ の
中にはあらわれない。次に dimension counting の方法で典型的
なのは(3)-b-1。逃げてゆく ends がないので，これは bubble
theorem で記述され，この ends は $([A], x_1) \in \mathcal{M}_1 \times M \subset \overline{\mathcal{M}}_2$ に対
応する。x_1 は高々2つの surfaces (Σ_i, Σ_j とする)上にしかない。
この時，transversality lemma から，$\dim(\mathcal{M}_1 \cap V_{\Sigma_i} \cap V_{\Sigma_j})$
$= 2 - 2 \times 2 = -2 < 0$。よって，$\mathcal{M}_1 \cap V_{\Sigma_i} \cap V_{\Sigma_j} = \phi$。
即ち，$([A], x_1) \in \mathcal{M}_1 \times M$ の点は N_2 の ends には現われぬ。(2)-a
は逃げてゆくものがあるが，これは1-インスタントンだと思えば
同様に次元を数えることで N_2 には現われないことがわかる。
(2)-b は，次のレンマ2の証明法と同様なのでレンマ2について
述べる。$\Sigma_1 \ni x_1, x_2$ とする。この時，Σ_1
上では，接続は Σ_1 上の自明平坦接続に近づく。
よって V_{Σ_1} には含まれない。故に，N_2
$= \mathcal{M}_2 \cap V_{\Sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\Sigma_4}$ にも含まれない。
結局，各曲面 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_4$ は曲率の集中
点 x_1, x_2 を必ず1つは含まなければ
ならない。それはとりも直さず，x_1
$\in \Sigma_i \cap \Sigma_j$，$x_2 \in \Sigma_k \cap \Sigma_l$ を意味する。



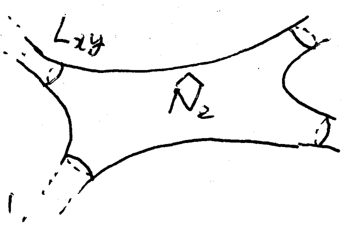


4.6 結び

前節より，N_2のendsの個数は，曲面$\Sigma_1,\dots,\Sigma_4$のconfiguration数に等しい。よって，N_2のendsの個数が偶数個であることを示すとよい。まずN_2のendsのlocalな形状をしらべる。2点$x_1\in\Sigma_i\cap\Sigma_j$，$x_2\in\Sigma_k\cap\Sigma_l$に曲率が集中してゆくendを$N(x,y)$とかく。$N(x,y)$のlocalな記述は，倉西の方法による。多様体$M$が閉でなくても，Taubes [17]によれば，genericなweight δをえらべば，次のdeformation complexはFredholm complexになる。

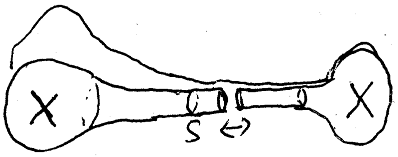
$$0\longrightarrow L^p_{k+2,\delta}\Omega^0(\mathrm{Ad}P)\xrightarrow{d_A}L^p_{k+1,\delta}\Omega^1(\mathrm{Ad}P)\xrightarrow{d_A^+}L^p_{k,\delta}\Omega^2_+(\mathrm{Ad}P)\longrightarrow 0 .$$

開多様体上のTaubesによるFredholm theoryを用い，結局bubble end $N(x,y)$のlocalな形は，閉の時と同様に$N(x,y)\cong L_{(x,y)}\times\mathbb{R}_+$，($L_{(x,y)}$はtopologicalには$S^1$のリンク)となる。そこで最後に，次のようなものを構成すればよい。即ち，N_2上の$\mathbb{R}$-直線束$\mathcal{L}\to N_2$でその1-st Stiefel-Whitney類を$w_1(\mathcal{L})$とする時，$w_1(\mathcal{L})$をN_2の各endのリンク$L_{(x,y)}$で値をとると常に$w_1(\mathcal{L})[L_{(x,y)}]=1\in\mathbb{Z}_2$となるものを構成すればよい。実際この時，$\hat{N}_2$を$N_2$の明なtruncationとすると，$\partial\hat{N}_2=\bigcup L_{(x,y)}$．故に，$0\equiv w_1(\mathcal{L})[\partial\hat{N}_2]=\bigcup_{x,y}w_1(\mathcal{L})[L_{xy}]=Q_4([\Sigma_1],\dots,[\Sigma_4])$がでる。



閉の時，$\mathcal{L}$は，baseの多様体Mのスピン構造を用いてえられたtwisted Dirac作用素のdet index束として定義されるが，今Mが開だと，Dirac作用素はFredholmでなくindex束が定義

されない。しかし，N_2にはにげてゆくendsがないことからN_2は
ある閉スピン多様体上の$c_2=2$なるSU(2)束上
の接続(anti-self dualではない)のモジュライ空
間の中にdiffeomorphicにうめ込める。(右図参照。)。そこで先の閉の
場合の議論を行えば，所要のλが構成される。



References

1. S. Akbulut and J. McCarthy, Casson's invariant for oriented homology 3-spheres — an exposition, preprint (1986)
2. S. K. Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, J. D. G <u>18</u> (1983), 279–315
3. ———, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, J. D. G. <u>24</u> (1986), 275–341.
4. ———, The orientation of Yang-Mills moduli spaces and four-manifold topology, J. D. G. <u>26</u> (1987), 397–428.
5. ———, Polynomial invariants for smooth four-manifolds to appear in Topology.
6. R. Fintushel and R. Stern, Instanton homology of Seifert-fibred homology three spheres, to appear in Proc, London. Math. Soc.
7. ———, Homotopy K3 surfaces containing $\Sigma(2,3,7)$. preprint.
8. A. Floer, An instanton invariant for 3-manifolds, Comm. Math. Phys. <u>118</u>, (1988) 215–240.

9. M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, J. D. G. 17 (1982), 357–453.
10. K. Fukaya, Instanton homology for oriented 3-manifolds. preprint (1989).
11. S. Fukuhara, Y. Matsumoto, K. Sakamoto, Casson's invariant of Seifert homology 3-spheres. (1988) Preprint.
12. M. Furuta, An analogue of Floer homology group for lens spaces. Preprint. (1988)
13. M. Furuta and B. Steer, Seifert fibred homology 3-spheres and the Yang-Mills equations on Riemann Surfaces with marked points. prepnt.
14. H. Ohta, Intersection forms of 4-manifolds with a homology 3-sphere boundary. Preprint. (1989)
15. J.P. Serre. Cours d'arithmétique, Press. Univ. de France, Paris (1970)
16. T. Takakura, Seifert fibered homology 3-sphereの基本群の表現空間におけるMorse theory. 東京大学修士論文 (1989).
17. C. H. Taubes, Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. J. D. G. 25 (1987), 363–430.
18. ———, Casson's invariant and gauge theory. Preprint.
19. K. K. Uhlenbeck, Connections with L^p-bounds on curvature, C. M. P. 83 (1982)
20. T. Yashida, Floer homology and splitting of manifolds. Preprint.

1990, 2. 8.